V. Investigationes *aliquot, ex quibus probetur* Terræ figu am *secundum Leges attractionis in ratione inversâ quadrati distantiarum maximè ad Ellipsin accedere debere, per Dn.* Alexin Clairaut, *Reg. Societ.* Lond. & *Reg. Scient. Acad.* Parif. *Soc.*

TAB. II. FIG. I.

I. EX principiis mathematicis Philosophiæ naturalis Newtonianæ (Corol. 3. Prop. XCI. Lib. I. & Prop. XIX. Lib. 3.) si Sphærois Elliptica ex particulis constans fluidis & homogeneis sese mutuo attrahentibus in ratione inversa quadrati distantiarum circa suum axem A *a* revolvatur, quò columnæ CE, CN, CA, ex quibus conflatur ista Sphærois, in æquilibrio constituantur, sicque Sphæroïdi semper eadem habeatur figura, necesse est ut gravitas in superficiei quocumque puncto N, sit in ratione inversâ radii CN.

Ut igitur sciamus an Sphærois gaudeat hâc proprietate, nunc quæramus qualem patiatur attractionem quodcumque Corpusculum N, totius Sphæroidis secundum directionem CN; atque ex ista attractione subducemus illam vis centrifugæ partem, quæ provenit ex rotatione Sphæroidis secundum CN agentis, & quæramus an vis residua sit proportionalis ipsi $\frac{1}{CN}$. Ideo quæremus primó Sequentia problemata; Cumque is nobis sit animus inventa applicare ad Terræ Sphæroidem,

dem, quam Sphæræ parum diſſimilem eſſe apud omnes conſtat, computa noſtra erunt iis Sphæroidibus aptanda, quarum axis maximus minorem ſuperat quam minimâ quantitate.

Problema Primum.

2. *Attractionem invenire, quam Sphærois* AEaE, *â Sphærâ quàm parum diſſidens exercet in Corpuſculum ſitum ad Polum* A.

Ad Solutionem hujus Problematis repetendum eſſet Corollarium 2um Prop. 91. Princip. Math. Philoſ. nat. ex quo diſcas modum inveniendi Sphæroidis cujuſcumque attractionem, ſi ſubſtituas ſcilicet in valore generali pro CE quantitatem, quæ infinitè parùm differat ab AC; ſed cum in iſto caſu multò facilius evadat problema, modo ſequenti ſolvemus.

Sit AMDad Sphæra, cujus radius eſt AC: quæremus attractionem Spatii orti ex revolutione ADaE, quæ attractio attractioni Sphæræ addita dat quæſitam attractionem.

Ad inveniendam attractionem Spatii ex revolutione ANEaDM orti, ſint AC, r, DE, αr, AP, u, ex naturâ Ellipſeos erit NM $= \alpha\sqrt{2ru - uu}$; ex naturâ verò circuli AM $= \sqrt{2ru}$. Spatium verò ortum ex revolutione NnmM erit $\frac{\alpha c}{r}.\overline{2ru - uu}.du$ cum ſit, c circumferentia, r verò radius.

Propter parvitatem ipſius NM, particulas omnes materiæ iſto in Spatio concluſas habere licebit tanquam æqualiter attrahentes corpuſculum in A: quare parvi iſtius ſpatii attractionem habebis, ſi ſoliditatem illius per

at-

attractionem in M multiplices, atqui iſta attractio in M debet eſſe $\frac{1}{AM^2} \times \frac{AP}{AM}$. Habebis ergo analyticè

$$\frac{u}{2ru\sqrt{2ru}} \cdot \frac{\alpha c}{r} \cdot 2ru - uu . du = \frac{\alpha c}{2rr\sqrt{2r}} (2rdu\sqrt{u}$$

$-udu\sqrt{u})$ cujus integralis $\frac{\alpha c}{2rr\sqrt{2r}} (\frac{4}{3} ru\sqrt{u} - \frac{2}{5} uu\sqrt{u})$ eſt attractio ſpatii orti ex revolutione ANM. Quo in valore ſi facias $u = 2r$, habebis per reductionem $\frac{8}{15} c\alpha$. Unde totius ſpatii AEaC exprimitur attractio, addendo poſtea $\frac{2}{3} c$ pro totius Sphæræ attractione. Habebis $\frac{2}{3} c + \frac{8}{15} c\alpha$ Ellipſoidis attractionem.

3. Coroll. Si oblongatum Sphæroidem habere velis, α erit negativus, ſumma verò attractionis erit $\frac{2}{3} c - \frac{8}{15} c\alpha$.

4. Nota. Si prædicta Sphærois loco circularium elementorum in PN exſurgentium aliis conſtaret elementis, v. gratiâ Ellipticis, quæ non magis quam Ellipſis AE à circulo diſcreparent, & quibus eadem quæ circulis PN eſſet ſuperficies, eadem, ut patet, ſemper eſſet attractio, quia in iſtis elementis PN, quæcumque vis reſidua eſſet, circulis PM ſublatis, haberetur tanquam conflata ex partibus quæ eandem ac in eam Ellipſoidis attractionem haberent, ratione habitâ parvitatis NM, æquabiliſque quantitatis materiæ.

LEMMA. TAB. II. FIG. 2.

5. Sint KL circulus, H centrum circuli, VH perpendicularis in areâ circuli, NH verò linea æqualis perpendiculari VH, quæ faciat angulum infinitè parvum, vel perexiguum cum illâ, dico attractionem circuli KL in N haberi poſſe abſque errore ſenſibili, tanquam attractionem ipſius circuli in V, ſive, quod idem eſt,

aliam

aliam attractionem ab altera non differre nisi quantitate infinitè minore respectu utriusque quam VN minor est respectu HV.

Quæ propositio ut demonstretur, ostendendum est, duobus corpusculis ad extremitatem constitutis alicujus Diametri KL unam esse vim attractivam in N, & aliam vim in V, quarum summa haberi potest eadem. Atqui neglectâ computatione ad habendam attractionem corporis in K positi in corpusculum N, facilè videas illud idem futurum esse cum attractione in V, cui addita foret insuper parva quantitas, quam ingrederetur NV. Similiter etiam videas attractionem corporis positi in L in corpusculum N eandem fore cum attractione in V, sublata eadem parva quantitate. Ideoque harumce ambarum attractionum summa una & eadem est.

6. Coroll. Si loco circuli KL esset certa Ellipsis, sive quædam alia curva linea, quæ discreparet quàm parum à Circulo, ex iisdem argumentis, quæ jam attulimus art. 4. facile colligitur locum semper fore propositioni prædictæ.

THEOREMA PRIMUM.

TAB. II. FIG. 3.

7. Sit AF*ae* Elliptica Sphærois, cujus sit A*a* axis revolutionis: dico quam attractionem hæc Sphærois exercet in corpusculum in N positum, eandem esse cum illâ attractione, quam exercet quæcumque Sphærois cujus esset Polus N, axis revolutionis N*n*, axis vero secundus radius circuli, cui eadem esset superficies ac Ellipsi FG sectioni Ellipsoidos AE*ae* per planum aliquod perpendiculariter erectum in FG Diametrum conjugatam ipsius.

Quod

Quod ut demonſtremus, imaginemur innumera elementa KL, quæ ſint parallela ad Ellipſim FG, id eſt quæ ſint omnia erecta in ordinatas ad Diametrum. Evidens eſt quod Sphærois AE*ae* in eo tantum a Sphæroide prædicta diſſidebit, quòd in prima omnia elementa faciant angulum cum CN ab angulo recto diſcrepantem angulo infinitè parvo, in ſecunda vero Elementa omnia angulum rectum faciant abſque ullo diſcrimine, cum in utraque Sphæroide Elementa ſuperficiem habeant eandem. Atqui ex propoſitione præcedenti uniuſcujuſque Elementi KL in N attractio quaſi eadem cenſetur in utroque Caſu; quod ſpectat vero craſſitiem Elementorum K*kl*L, licet ſumere H*h* pro perpendiculari *hi* propter parvitatem anguli *ih*H; utriuſque ideo Sphæroidis attractiones totales, altera in alterius vicem ſumi poterunt.

Problema Secundum.

8. *Invenire attractionem Sphæroidis* AE *ae in corpuſculum quocumque in puncto* N *poſitum.*

Sint AC $= a$, CE $= b$, CN $= r$, CG Diameter conjugata CN erit $\frac{ab}{r}$ (quando a & b quamminimè inter ſe differunt,) oportet ex propoſitione præcedenti quærere attractionem Sphæroidis, cujus major axis ſit r, minor vero $\sqrt{\frac{abb}{r}}$, ſive $b\sqrt{\frac{a}{r}}$.

Ad hoc adhibenda eſt formula, quam invenimus (Problemate 1°) $\frac{2}{3}c - \frac{8}{15}c\alpha$, ſive $\frac{2}{3}pr - \frac{8}{15}pr\alpha$ (ponendo pr pro c) in locum α vero hac in formula ſubſtituendum eſt $\frac{r - b\sqrt{\frac{a}{r}}}{r} = 1 - \frac{b}{r}\sqrt{\frac{a}{r}}$, ſive $\frac{3}{2}n - m$; ſi $a + ma$ pro b, $a + na$ pro r ponas, atque in computo contemnas gradus ſecundos magnitudum n et m.

Si

Si ergo $\frac{3}{2}n - m$ in locum α fufficias, formula prædicta evadet $\frac{2}{3}pr - \frac{4}{5}prn + \frac{8}{15}prm$, five $\frac{2}{3}pa - \frac{2}{15}pan + \frac{8}{15}pam$; quæ expreffio eft quæfitæ attractionis Sphæroidis in N.

9. Si $n = o$, tunc habeas $\frac{2}{3}pa + \frac{8}{15}pam$ pro attractione in a, id eft ad Polum.

10. Si vero $n = m$, tunc habeas $\frac{2}{3}pa + \frac{6}{15}pam$ pro attractione ad Æquatorem.

THEOREMA SECUNDUM.

TAB. FIG. 1

11. Sit, ut fupra, AEae Sphærois, cujus axes inter fe differant quamminimâ quantitate, quam ad majorem perfpicuitatem dicam infinitè parvam. Si hæc Sphærois concipiatur effe ex materia fluida ac homogenea, & rotata circum axem Aa, tempore congruenti, quo æqualis fit columnæ CE gravitas, gravitati columnæ AC, hoc eft, ex principiis Newtonianis attractio in E, demtâ vi centrifugâ fit ad attractionem in A, ficut CA ad CE: dico quod omnes columnæ CN, infinitè parvo fecundi ordinis deficiente, æquilibrium cum iftis duabus columnis fervabunt; id eft, attractio in N, fublatâ vi centrifugâ fimplici effectâ fecundùm CN, eft ad attractionem in A, ficut CA ad CN.

Ad Demonftrationem eædem ferventur denominationes, quas in propofitione præcedenti adhibui; quæratur primo vis centrifuga in E, quæ conveniat cum Æquilibrio Columnarum CE, CA.

Propterea fic dicatur $\frac{2}{3}pa + \frac{6}{15}pam - f : \frac{2}{3}pa + \frac{8}{15}pam :: 1 : 1 + m$, unde educitur $f = \frac{8}{15}pam$.

Deinde ad adhibendam gravitatem in N compofitam ex attractione, demtâ vi centrifugâ, quærenda eft vis centrifuga in N, five, quod idem eft, in M fupra

Sphæram,

Sphæram, quia a se invicem non dissidere debent nisi infinite parvo secuudi ordinis, si supponatur D E exprimere vim centrifugam f in E, M N exprimet vim centrifugam in N, vires enim centrifugæ sunt ut radii, quando eadem sunt revolutionum tempora, per proprietatem verò Ellipseos fit ut D E : N M : : C E : M P.

Vis autem centrifuga si agat secundum N P, oportet eam reducere secundum N C. N O erit pars residua. Vis igitur centrifuga in N vel in M est ad vim centrifugam in E vel in D, sicut N O est ad D E. Expressio adeo vis centrifugæ in N erit $\frac{8}{15}pan$, ac consequenter expressio gravitatis eodem erit $\frac{2}{3}pa - \frac{2}{15}pan + \frac{8}{15}pam - \frac{8}{15}pna$, vel $\frac{2}{3}pa - \frac{2}{3}pna + \frac{8}{15}pam$.

Nunc ad inveniendam vim centrifugam in N quæ sequitur ex Aequilibrio Columnarum, gravitas in A sit oportat ad gravitatem in N, sicut N C ad A C, gravitas in A est $\frac{2}{3}pa + \frac{8}{15}pam$, qua expressione ducta in $\frac{1}{1+n}$ sive $1-n$, post reductionem evadet $\frac{2}{3}pa - \frac{2}{3}pn + \frac{8}{15}pam$, & eadem quæ supra est expressio. Inde videre licet inter figuram quam obtinere debet Terra ex hypothesi Newtoniana, et Ellipsoïdem non nisi infinite parvum discrimen esse posse. Quantitas enim D E cum sit $\frac{1}{230}$ma pars A C circiter, in præcedenti Computatione, contemnuntur tantummodo quantitates ejusdem ordinis cum $\frac{1}{230 \cdot 230}$.

Fig. 1.

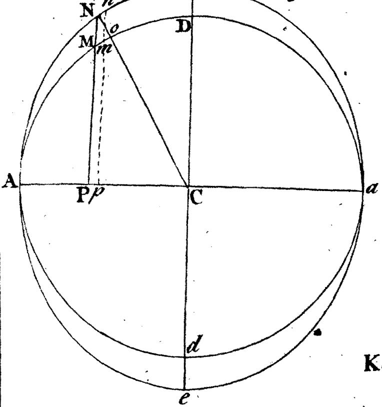


Fig. 2.

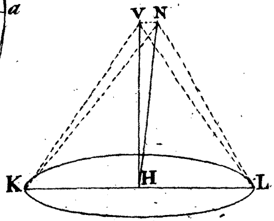


Fig. 3.

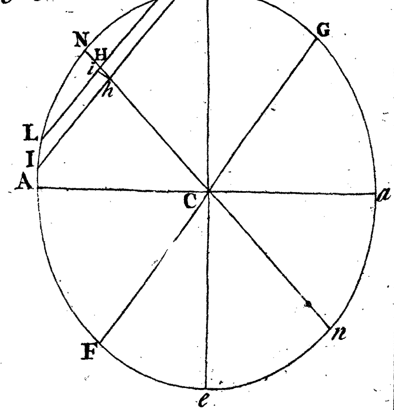


Fig. 4.

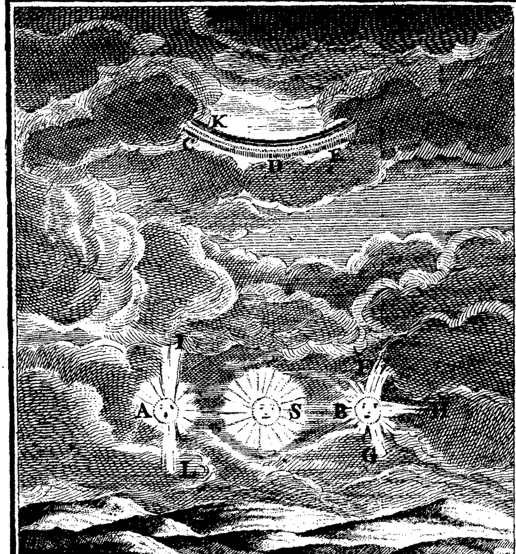
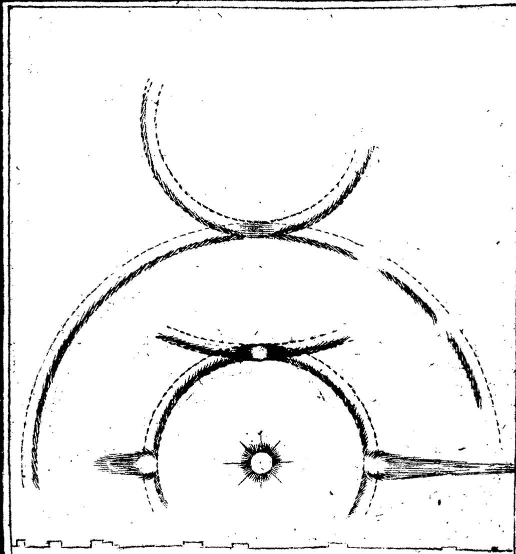


Fig. 5.



J. Mynde sc.